三角関数の因数分解

2016 年度 理工学部 数学科 模擬講義

1. 多項式 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ は $x=1,\ -2,\ 3$ の 3 つの値で 0 になる. このことから

$$f(x)=c(x-1)(x+2)(x-3)$$

と因数分解される. $x=0$ としてみると $c=1$.

2. もう 1 つ. $g(x)=x^3-4x^2+5x-2$ については $x=1$ と $x=2$ の 2 つの値でしか 0 にならない. しかし $g(x)\div(x-1)=x^2-3x+2$ は $x=1$ で 0 になるので, $g(x)=(x-1)(x-2)$ がわかり, $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ がわかる. この様に重根の場合に要注意!

3. さて表題の三角関数というのは $\sin x$ のこと. 関数 $\sin x$ が 0 になるのは丁度

$$x=n\pi \qquad (\ n=\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$$

のときで, $\displaystyle\lim_{x\to n\pi}\frac{\sin x}{x-n\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(x+n\pi)}{t}=\pm1\neq 0$ などから, どれも重根ではない. そこで,

$$\sin x=cx(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)\cdots$$

とならないかと想像を逞しくしてみる. しかし,

$$\frac{\sin x}{x}=c(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)\cdots \quad (c\neq 0)$$

と書き直してみて $x\to 0$ としてみる（代入できないので極限値で代用する）と左辺は 1 に近付き, 右辺（の絶対値）は $c\neq 0$ だと発散するので, うまく行かない.

4. それなら c を「小まめに調整」してはどうか. つまり各因子が $x=0$ で左辺の極限値 1 になる様にして

$$\frac{\sin x}{x}=c'\Big(1-\frac{x}{\pi}\Big)\Big(1+\frac{x}{\pi}\Big)\Big(1-\frac{x}{2\pi}\Big)\Big(1+\frac{x}{2\pi}\Big)\Big(1-\frac{x}{3\pi}\Big)\Big(1+\frac{x}{3\pi}\Big)\cdots \quad (c'\neq 0)$$

と書いてみれば $c'=1$ がわかる (極限 $x\to 0$ による). 結局

公式 : $\sin x$ の因数分解

$$\begin{aligned}\sin x&=\cdots\Big(1-\frac{x}{3\pi}\Big)\Big(1-\frac{x}{2\pi}\Big)\Big(1-\frac{x}{\pi}\Big)x\Big(1+\frac{x}{\pi}\Big)\Big(1+\frac{x}{2\pi}\Big)\Big(1+\frac{x}{3\pi}\Big)\cdots\\&=x\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\Big)\cdots.\end{aligned}$$

を得る. 以上の推論は厳密な証明ではない! でも, これを数値計算して実験してみると

(ただし, 右辺は $\Big(1-\dfrac{x^2}{2000000^2\pi^2}\Big)$ まで計算)

x	$\sin x$	右辺
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}=$ 0.5	0.50000000694$\cdots$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=$ 0.7071067$\cdots$	0.7071068$\cdots$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}=-$0.2955202$\cdots$	$-$0.2955203$\cdots$

5. 最後に, 得られた公式の展開もしてみよう. まず

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \quad \text{のとき}$$
$$f(0) = a, \quad f'(0) = b, \quad f''(0) = 2c, \quad f'''(0) = 6\,d, \ \cdots$$

となる. 気楽にこれと同じ様に考えて,

	$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin x)'' = -\sin x$	$(\sin x)''' = -\cos x$
$x = 0$	0	1	0	−1

であることから,

$$\sin x = 0 + 1x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{6}x^3 + \cdots = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots .$$

一方, 右辺は

$$\begin{aligned}\sin x &= x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^3}\right)\cdots \\ &= x\left(1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\right)x^2 + \cdots\right) \\ &= x - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\right)x^3 + \cdots .\end{aligned}$$

と書けるので, x^3 の係数を比較して

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}.$$

$$\therefore \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

この左辺の級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1$$

と似ているが, この方法では求められない無限級数である.

◎ 三角関数も多項式と同じ様に扱ってよさそうである (無限というものを怖がらなくてよい).
数学は「心が広く」「寛容で」「器が大きい」と感じていただけたら光栄である.

大西 良博

三角形のいろいろな不思議

名城大学オープンキャンパスにようこそ

2019 年 8 月 4 日

名城大学 理工学部 数学科 小沢哲也

子供の頃の些細な経験で数学に嫌気がさしてしまうのは，本当に残念なことだ．

H. ラドマッハー

美しい和音を楽しむ心と同じように数学を称賛する心を持っている人は多い．音楽にワクワクする人と同じくらい数学にワクワクする人がいるんじゃないか．

G. H. ハーディー

1．メネラウスの定理の言い換え　三角形の各頂点 A, B, C に相異なる 3 つの正の数 a, b, c を与え，辺 AB を $a : b$ に外分する点を P, 辺 BC を $b : c$ に外分する点を Q, 辺 CA を $c : a$ に外分する点を R とする．このとき，3 点 P, Q, R は 1 直線上にある．

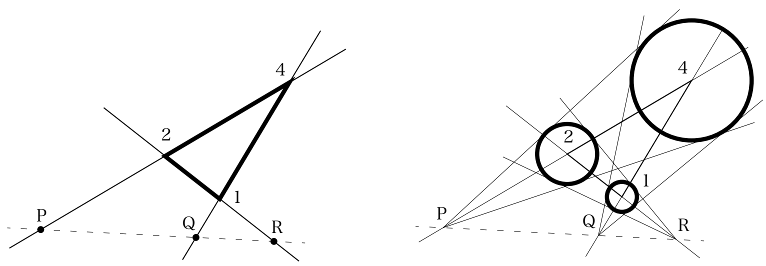


図 1　メネラウスの定理

2．内接円と傍接円　三角形の内接円の半径を r, 3 つの傍接円の半径をそれぞれ r_1, r_2, r_3 とするとき，$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3}$ が成り立つ．

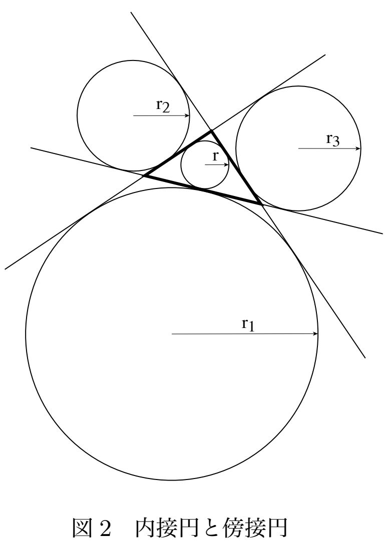


図 2　内接円と傍接円

3. フェルマの問題　三角形 ABC はどの内角も 120 度より小さいものとする．このとき, 三角形内の点 P で, AP + BP + CP が最小になるものを作図せよ．(作図とは, コンパスと定規を使って図形を描くことを言います.)

4. ナポレオンの定理　三角形の各辺を 1 辺にもつ 3 つの正三角形をそれぞれもとの三角形の外に描き, それらの正三角形の重心を P, Q, R とする．このとき, 三角形 PQR は正三角形である．

5. ビリヤード　鋭角三角形内でビリヤードの玉が周期的な軌跡を描くようにするにはどのように玉を突けば良いかを考えよ．

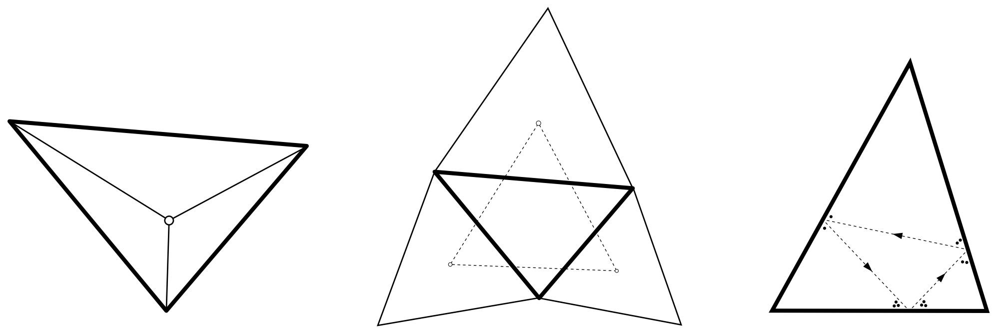


図 3　フェルマの問題 (左), ナポレオンの定理 (中) と ビリヤード (右)

6. 球面三角形　球面上で内角の和が 190 度になるような三角形を探せ．

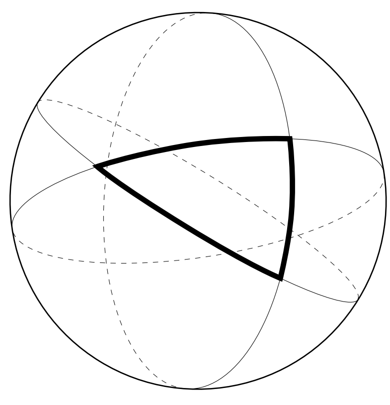


図 4　球面の三角形

7. 非ユークリッド幾何　内角の和が 170 度の三角形が存在するような世界を見つけよ．

うちわの問題 1.　直角二等辺三角形を 8 個以下の鋭角三角形に分割せよ．

うちわの問題 2.　正方形を 10 個以下の鋭角三角形に分割せよ．

● 数学科オープンラボでは, この答えの解説もやっています．また, 三角形の不思議に関連した工作も体験できます!　　気になる君は, 今すぐ数学科オープンラボへ GO！

素因数分解とその一般化

許斐 豊

名城大学理工学部数学科

2020 年 8 月 31 日

整数論って？

整数論は，「素数とは何か？」を問うことが多い分野.

$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ ばかりではなく，代数，幾何，解析などの様々な道具を扱う!

素数の例

- $2, 3, 5, 7, 11, \cdots$ が素数.
- $1, 4, 6, 8, 9, 10, \cdots$ は素数ではない.
- $-2, -3, -5, \cdots$ は整数全体の集合で「素数」といって良い.

素数の定義

正の整数 p が次の 2 つの条件

1. $p \neq 1$.
2. p は真の約数を持たない.

を満たす時に素数という.

なんで素数が大事なの？

定理 (素因数分解の一意性)

2 以上の整数 m は異なる素数 p_i と正の整数 e_i で

$$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

と一意的に書きあわらせる.

素因数分解の例

- $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ で, 本質的にこれ以外の素因数分解はない.
- 2 の素因数分解は 2, 素数 p の素因数分解は p

- 整数は掛け算で分解すると, 素数が根源になっている.
  $\longrightarrow$ 物質を分解すると原子が根源になるのに似ている.
- 足し算で分解すると, $1 = 1,\ 2 = 1 + 1,\ 3 = 1 + 1 + 1, \cdots$
  $\longrightarrow$ 1 が根源. (巡回群という概念に拡張される)

素数って知り尽くされているんじゃない？

問題: 次の数は素数か？

1. 57
2. 1111111111111111111
3. 686479766013060971498190079908139321726943530014330540939446345918554318339765605212255964066145455497729631139148085803712198799971664381257402829111505715 1
4. 3646154850295011369707131011438711095400799139943170490872585628683549034362552065955809589514611470241298944167703929337528884908857116141935206466329731087514964112054543019336536216107629523597606330154669196064144182472739556974502462402438903115845725630946428943768540714098264727068026730424033578827886916761701429264950573899186177

計算代数ソフト Sage

- Sage は薬草の「セージ」と同じ発音, 「さげ」ではない!
- Magma, Maple, Mathematica, MATLAB などの有償のソフトの代替えを目的として, William Stein 氏を中心に 2004 年から開発が始まる.
  → Sage は**オープンソース**で, **何をしているかがわかる**!
- Windows, Mac, Linux 等の OS で使える.
- Sage Math Cell というクラウド版もあり, **スマホで使える**.
  https://sagecell.sagemath.org/
- 次を入力すると素数かどうかをわかる: `is_prime(57)`
- 次を入力すると 57 を素因数分解してくれる: `factor(57)`

問題の解答

次の数は素数か？の解答

1. 素数ではないが，グロタンディーク素数と呼ばれる．
2. 素数．
3. $2^{521}-1$ で，メルセンヌ素数と呼ばれる．
4. メルセンヌ素数の積 $(2^{521}-1)\cdot(2^{607}-1)$．

- 「大きい数が素数であるか」の判定は計算機を使っても大変．
  $\rightarrow$ $2^{57885161}-1$ が素数かどうかを計算機でやってみると…
- 「大きい数を素因数分解する」のは計算機を使用しても現実的ではない!
  $\rightarrow$ 実はこの「素因数分解が簡単には出来ない」という性質は，暗号に使われている．

ちょっと横道 (その 1)

次の「黒で書かれた数」と「青で書かれた数」は同じ数？

それとも違う数？

ちょっと横道 (その 1, 黒で書かれた数)

141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944
592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647
093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559
644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165
271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273
724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360
011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953
092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724
891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737
190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132
000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901
224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960
864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951
059731732816096318595024459455346908302642522308253344685035
261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303
598253490428755468731159562863882353787593751957781857780532
171226806613001927876611195909216420198938095257201065485863

ちょっと横道 (その 1, 青で書かれた数)

141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944
592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647
093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559
644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165
271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273
724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360
011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953
092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724
891227938183011949129833673362440656643086021394946395224737
190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132
000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901
224953430146549585371050792279689258923542019956112129021960
864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951
059731732816096318595024459455346908302642522308253344685035
261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303
598253490428755468731159562863882353787593751957787857780532
171226806613001927876611195909216420198938095257201065485863

ちょっと横道 (その 1), 言いたかったこと

「2 つの自然数が同じかどうか」ですら, 簡単には認識出来ない！

ちょっと横道 (その 2), 数学って役に立つの？

- 役に立つ立たないよりは, 「数って不思議だよね」とか「面白いよね」という初期衝動のほうが大事, と思うこともある.

- 実際に役立ってます, と思うこともある.

$\longrightarrow$Deep Learning, 金融工学, DNA の解析, タンパク質の分析等.

- 「どう役立てるか」を教えることが全く出来てない, と思うこともある.

お馴染みの因数分解

整式の分解

1. $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$.
2. $\sqrt{2}$ は有理数ではなく, $X^2 - 2 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.
3. 中学では X^2+1 は因数分解出来ないと言われた.
4. 高校で $i^2 = -1$ を満たす**実数ではない数** i があると言われ, $X^2+1 = (X+i)(X-i)$.
5. $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$.
6. $X^3 - 1 = (X-1)(X - \frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(X - \frac{-1-\sqrt{-3}}{2})$.

$\longrightarrow$ 実はこれらは素因数分解の一種！

状況整理のための記号の導入

- 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ で書く．
  正式な表記ではないが $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots\}$.
- 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ で書く，例えば $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
  正式な表記ではないが $\mathbb{Q} = \{0, \pm\frac{1}{1}, \cdots \pm \frac{22}{7}, \cdots\}$.
- 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で書く，例えば $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$.
- i を $i^2 = -1$ を満たす数とし，$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ で定め，複素数全体の集合という．
- 変数 X の有理数係数の多項式全体の集合を $\mathbb{Q}[X]$ で書く．
  $\rightarrow$ $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ だが $X + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}[X]$
- 同様に $\mathbb{R}[X]$ と $\mathbb{C}[X]$ を定義すると，

$$\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X].$$

複素数についての補足

- 先程の i は純虚数と呼ばれ, i のかわりに $\sqrt{-1}$ で書くことも.
- 全ての実数 a は $a^2 \geq 0$ となるので, i は実数ではない.
- i を含む計算は $\sqrt{2}$ の計算とほぼ同じ.
- ただし i を含む数は, 不等号の関係は壊れてしまう！
- 複素数は, xy-平面の点に変な掛け算をいれれば構成可能！

余談になるけど...

1. $\emptyset$ を 0, $0 \cup \{0\} = \{\emptyset\}$ を 1, $1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ を 2, $2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ を 3, $\cdots$ とすることで自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ が構成出来る.
2. 直積集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ にうまく同値関係を入れると $\mathbb{Z}$ が作れる.
3. $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ にうまく同値関係を入れると $\mathbb{Q}$ が作れる.
4. 有理数列でコーシー列となるもの全体に, うまく同値関係を入れると $\mathbb{R}$ が作れる.

因数分解再考

1. $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$ は $\mathbb{Q}[X]$ において,
   $X-2$ と $X+2$ は「素数」, X^2-4 は「素数でない」.
2. $X^2 - 2 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ は $\mathbb{R}[X]$ では正しい分解.
   しかし, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ なので $\mathbb{Q}[X]$ ではこの分解は出来ない.
   $\rightarrow$ X^2-2 は $\mathbb{Q}[X]$ では「素数」.
3. X^2+1 は $\mathbb{Q}[X]$ でも $\mathbb{R}[X]$ でも「素数」.
4. ところが X^2+1 は $\mathbb{C}[X]$ では「素数」ではなく,
   $X^2+1 = (X+i)(X-i)$ と「素因数分解」される.
5. $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ は,
   $\mathbb{Q}[X]$ や $\mathbb{R}[X]$ においては「素因数分解」を意味する.
6. $\mathbb{C}[X]$ での X^3-1 の「素因数分解」は,
   $X^3 - 1 = (X-1)(X - \frac{-1+\sqrt{-3}}{2})(X - \frac{-1-\sqrt{-3}}{2})$.

$2, 3, 5, 7, \cdots$ は整数を含む集合で素数？

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ だが, $5 = 3 \cdot \dfrac{5}{3} = 4 \cdot \dfrac{5}{4}$ となり, $\mathbb{Q}$ では 5 の「約数」がいくらでもあり, 素数っぽくなくなる.
  $\rightarrow$ $\mathbb{Q}$ では $2, 3, 5, 7, \cdots$ は全て「素数」ではなくなる.
- $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ をガウスの整数環という.
  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ であり, この $\mathbb{Z}[i]$ では良い感じになる.

定理 (ガウス整数環 $Z[i]$ での素数の分解)

1. $2 = (1 - i)(1 + i)$ より, $\mathbb{Z}[i]$ で 2 は「素数」ではない.
2. $\mathbb{Z}[i]$ で 3 は「素数」.
3. $5 = (1 - 2i)(1 + 2i)$ より, $\mathbb{Z}[i]$ で 5 は「素数」ではない.
4. $\mathbb{Z}$ の素数 p が $\mathbb{Z}[i]$ でも「素数」 $\iff p \equiv 3 \pmod 4$.
5. $\mathbb{Z}[i]$ は「素因数分解の一意性」が成り立つ.

$\mathbb{Z}[i]$ の既約元とは

正の整数 p が, (任意の) 整数 a, b について

$$p = ab \;\Rightarrow\; a = \pm 1 \text{ または } b = \pm 1$$

を満たすというのが素数の定義だった.

定義 (既約元)

$p \in \mathbb{Z}[i]$ が, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ について

$$p = \alpha\beta \Rightarrow \alpha \in \{\pm 1, \pm i\} \text{ または } \beta \in \{\pm 1, \pm i\}$$

を満たす時, p を **$\mathbb{Z}[i]$ の既約元**という.

3 が $\mathbb{Z}[i]$ で既約元となることの証明

1. 整数 a, b, c, d で, $3 = (a + bi)(c + di)$ と書けたとする.
2. 上の式の複素共役を考えると, $3 = (a - bi)(c - di)$.
3. この 2 つをかけると $9 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.
4. 従って $a^2 + b^2 = 1, 3, 9$ のいずれか.
   - $a^2 + b^2 = 1$ なら $(a, b) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ となり $a + bi \in \{\pm 1, \pm i\}$.
   - $a^2 + b^2 = 3$ となる整数 a, b はないのでこれは起こらない.
   - $a^2 + b^2 = 9$ なら $(a, b) = (\pm 3, 0), (0, \pm 3)$ となり $c + di \in \{\pm 1, \pm i\}$.
5. $a + bi \in \{\pm 1, \pm i\}$ または $c + di \in \{\pm 1, \pm i\}$ がいえた.

実は Sage で次を入力するとすぐにわかってしまう:

```
K.<I>=NumberField(x^2+1)
view(K.factor(3))
```

既約元による分解が一意的では無い環

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とする.

実は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ では「素因数分解の一意性」が成立しない！

定理

$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は一意分解整域ではない.

1. $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ という分解を考える.
2. 前のページと同様に, 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$, $1 - \sqrt{-5}$ の 4 つは $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の既約元となることがわかる.
3. よって分解が一意的ではない.

なんで「素因数分解の一意性」が大事なの？

フェルマーの大定理

自然数 $n \geq 3$ について, $x^n + y^n = z^n$ を満たす正の整数 x, y, z は存在しない.

- ラメが 1847 に「フェルマーの大定理を解いた」と言い出した.
- その証明で $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ の素因数分解の一意性を使ってしまった. (ここで, p は素数, $\zeta_p = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$.)
- クンマーがラメの同僚リュービルに, 一般には素因数分解の一意性が成立しないことを手紙で伝えた.
- その後, クンマーは素因数分解の一意性が成立しないような代数体の整数環でも, イデアルについては素イデアル分解の一意性が成り立つことを示し, 代数的整数論の基礎を作った.

※ $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ が素元分解整域の場合 (実はこの条件は弱めれる) には, $x^p + y^p = z^p$ に正の整数解がないことが示せる.

参考文献

[1] 足立恒雄, フェルマーの大定理　第 2 版, 日本評論社.

[2] 加藤和也, 黒川信重, 斎藤毅, 数論 I　Fermat の夢と類対論, 岩波書店.

[3] SageMathCell, https://sagecell.sagemath.org/

大学の数学と機械学習

許斐 豊

名城大学理工学部数学科

2021 年 7 月 31 日

数学って役に立つの？

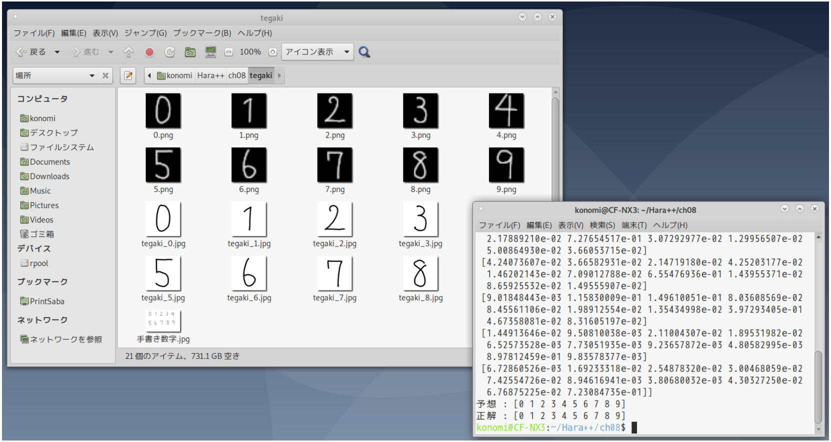
1. 役に立つ立たないよりは，「数って不思議だよね」とか「面白いよね」という初期衝動のほうが大事，と思うこともある．
2. 実際に役立ってます，と思うこともある．
   → 機械学習，金融工学，DNA の解析，タンパク質の分析等．
3. 「どう役立てるか」を教えることが全く出来てない，と思うこともある．

本日の主題

数学と機械学習

機械学習による手書き数字の識別

次の写真は，参考文献 [1] を元に，**0 ～ 9 の手書き数字**を**コンピューターで自動識別させた**もの:



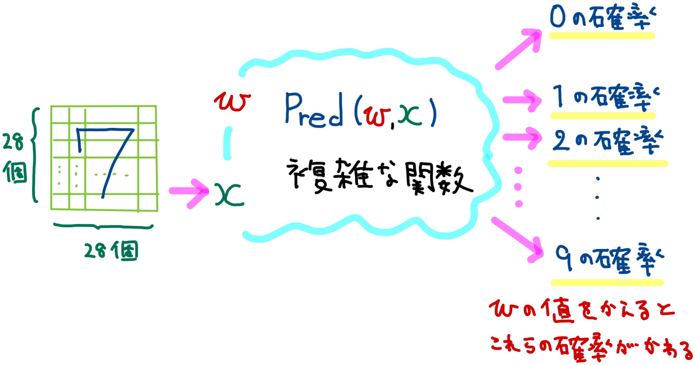
仕組み

1. $0 \sim 9$ の数字と正解が書かれた「教師データ」x_t を準備.
2. 「画像データ」を入力する変数 x, 「重み」と呼ばれる変数 w を持つ数字を予想する関数 $Pred(w, x)$ を構成する.
3. $Pred(w, x)$ を元に, 「正解からどれくらい離れているか」を出力する損失関数 $L(w, x)$ を構成する.
   $\rightarrow$ $L(w, x)$ は値が小さい程「正解に近い」.
4. 重みの初期値 w_0 を「適切に」定める.
5. 「教師データ」を x に代入し, $L(w_0, x_t)$ の値が小さくなるように重み w_0 の値を自動で変更する.
6. 上の操作を n 回繰り返したときに得られる重み w_n と手書き数字の画像データ x_h を入力した $Pred(w_n, x_h)$ の値が機械が判断した数字.

仕組み (補足)

1. 教師データについて: (参考文献 [3])

2. 数字を予想する関数の雰囲気:



「予想する関数」と「損失関数」について

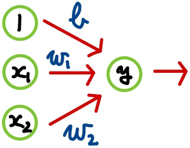
$e = 2.718\cdots$ とし, 次の関数を合成する.

1. $y = w_1x_1 + w_2x_2 + b = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + b$
2. ランプ (ReLU) 関数: $f(x) = \begin{cases} x & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$
3. ソフトマックス関数: $y_k = \dfrac{e^{x_k}}{e^{x_0} + \cdots + e^{x_9}}$
4. 交差エントロピー誤差: $E = -\sum_k t_k \log(y_k),\ t_k \in \{0, 1\}$

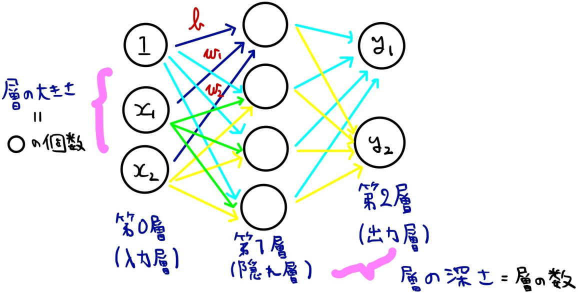
合成した関数の意味合い

- **最初の 2 つの関数の合成**:

$$y = \begin{cases} 0 & (w_1x_1 + w_2x_2 + b \leq 0) \\ w_1x_1 + w_2x_2 + b & (w_1x_1 + w_2x_2 + b > 0) \end{cases}$$

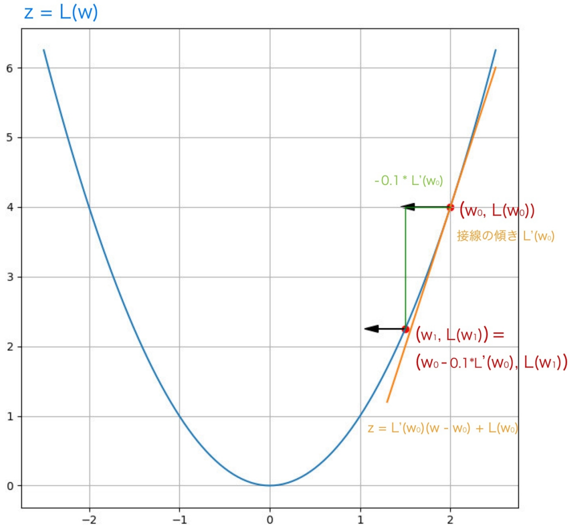


- **「数字を予想する関数」の中身の部品**:



どうやって自動で w の値を自動更新するの？

微分 (接線, 接平面) を利用した「**勾配降下法**」を使う！



Python3 で実際に計算してみた

- 左: 先程の説明の Python3 によるプログラム.
- 右: プログラムの実行結果.

1次元勾配降下.py (~) - Pluma

```python
w = 2 # 初期の座標, 人間が決める.
delta = 0.1 # 学習率, 人間が決める.
N = 20 # 繰り返し回数, 人間が決める.

def L(x):
  return x*x

print('最初は({}, {})'.format(w, L(w)))

for i in range(N):
    w = w - delta*(2*w)
    print('{}回目で({}, {})'.format(i+1, w, L(w)) )
```

konomi@CF-NX3: ~

```
konomi@CF-NX3:~$ python3 1次元勾配降下.py
最初は(2, 4)
1回目で(1.6, 2.5600000000000005)
2回目で(1.28, 1.6384)
3回目で(1.024, 1.048576)
4回目で(0.8192, 0.67108864)
5回目で(0.65536, 0.42949672960000007)
6回目で(0.5242880000000001, 0.27487790694400001)
7回目で(0.4194304000000001, 0.17592186044416008)
8回目で(0.33554432000000006, 0.11258999068426244)
9回目で(0.26843545600000007, 0.07205759403792797)
10回目で(0.21474836480000006, 0.046116860184273904)
11回目で(0.17179869184000005, 0.029514790517935298)
12回目で(0.13743895347200002, 0.018889465931478586)
13回目で(0.10995116277760002, 0.012089258196146296)
14回目で(0.08796093022208001, 0.007737125245533629)
15回目で(0.070368744177664, 0.0049517601571415215)
16回目で(0.056294995342131206, 0.003169126500570574)
17回目で(0.04503599627370496, 0.0020282409603651673)
18回目で(0.03602879701896397, 0.001298074214633707)
19回目で(0.028823037615171177, 0.0008307674973655726)
20回目で(0.02305843009213694, 0.0005316911983139664)
konomi@CF-NX3:~$
```

計算の効率化について

1. **誤差逆伝播法**: 微分の公式 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$ を利用.
2. まとめて計算するために**行列**を利用.

連立方程式 $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases}$ の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

この連立方程式を大学 1 年で習う**行列**を使い表示してみる:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

逆行列を用いてこの連立方程式の解を求めてみる:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

まとめ

1. 純粋数学ではないけど，機械学習も面白いです！
2. 良い意味でも悪い意味でも強い影響がでる分野だと思います．

参考文献

[1] 斎藤 康毅, ゼロから作る Deep Learning, オライリージャパン.

[2] 赤石 雅典, 最短コースでわかる ディープラーニングの数学, 日経 BP.

[3] TensorFlow 公式ページ, https://www.tensorflow.org/

2021 年度
名城大学オープンキャンパス
模擬講義

数列についてのちょっとした話

名城大学　理工学部数学科

まえがき

- 数を 1 列に並べたものを数列といい，数列の各数を項といいます．
- 数列を一般的に表すには，1 つの文字に項の番号を添えて

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots \tag{0.1}$$

  のように書き，a_1 のことをこの数列の初項 (第 1 項)，a_2 のことを第 2 項，...，a_n のことを第 n 項といいます．
- また，この数列を $\{a_n\}$ とも書き表し，a_n のことを数列 $\{a_n\}$ の一般項といいます．

基本的な数列

初項 a, 公差 d の等差数列

$$a_n = a + (n-1)d$$

初項 a, 公比 r の等比数列

$$a_n = ar^{n-1}$$

- この模擬講義では，皆さんが高等学校で学んできた数列についての幾つかの内容にちょっとだけ調味料を加えたお話をします.
- 「数学 B」や「数学 III」の教科書に書いてある内容だけで数列の勉強が終わってしまうのはもったいないので，せっかくだからちょっと背伸びをしてみようというわけです.

今回の話のメインテーマ

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$ の世界をちょっとのぞいてみよう！

最初と途中で少し脱線した話もしますが，気を楽にして聞いてください．ちょっと雰囲気の違う数学の話を体感してもらえれば嬉しく思います．受験勉強の役には立たないかもしれません．ごめんなさい．

. . . (てんてんてん) に気をつけよう！

次の問題を考えてみましょう.

次の数列 $\{a_n\}$ に対して a_{10} を推定しなさい.

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ \ldots$$

次の ①, ②, ③, ④ の中で，どれが正解でしょうか？

$$
\begin{array}{ccc}
① & \cdots & 20 \\
② & \cdots & -\dfrac{788}{11} \\
③ & \cdots & 1700 \\
④ & \cdots & \dfrac{248}{25}
\end{array}
$$

答　全部正解！

一般項が次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ に対して，a_1，a_2，a_3 と a_{10} を計算してみると分かります．

$$
\begin{aligned}
① \quad \cdots \quad & a_n = 2n \\
② \quad \cdots \quad & a_n = -\frac{2}{11}n^3 + \frac{12}{11}n^2 + \frac{12}{11} \\
③ \quad \cdots \quad & a_n = \frac{1}{3}n^4 - 2n^3 + \frac{11}{3}n^2 \\
④ \quad \cdots \quad & a_n = 12 - \frac{22}{n} + \frac{12}{n^2}
\end{aligned}
$$

正解がこのように複数現れる理由は，問題文の中で a_4 から先の項が ... (てんてんてん) と書かれていて，はっきりしていないことによります．

- 皆さんの多くは ① の $a_{10} = 20$ が正解だと思ったのではないでしょうか．もちろん，それはまっとうな考え方ですし，上にも書いたように正解です．また，学校の試験問題や大学の入試問題の解答としては申し分ありません．
- しかし，柔軟な発想力を身につけるために，1 つの答が浮かんだ後に，余裕があれば他の答の可能性も考えてみるようにしてみてください．
- 世の中には，この問題文のようなはっきりしない記述でみなさんをひっかけようとする罠がいっぱいあります．

ちなみに，この問題に対しては，どんな数を答にしても正解となります．(虚数でも OK です.)

べき乗和について (その 1)

p を 0 または自然数として，一般項 a_n が

$$a_n = n^p$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考えてみましょう．この数列の初項から第 n 項までの和

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p + n^p \tag{2.1}$$

のことをべき乗和 (または累乗和) といったりします．

「数学Ｂ」の教科書には $p = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ のときのべき乗和 (2.1) について，それが n を使ってどのように書き表されるかが述べられています．復習してみましょう．

$p = 0$ の場合:

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$p = 1$ の場合:

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$p = 2$ の場合:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$p = 3$ の場合:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

p が 4 以上のときは？

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) = \frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$= \frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$= \frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

$$= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{20} n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)$$

$$= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \frac{1}{66} n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)$$

$$\times (3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$$

$$= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{24} n^2 (n+1)^2 \times (2n^8 + 8n^7 + 4n^6 - 16n^5 - 5n^4 + 26n^3 - 3n^2 - 20n + 10)$$

$$= \frac{1}{12} n^{12} + \frac{1}{2} n^{11} + \frac{11}{12} n^{10} - \frac{11}{8} n^8 + \frac{11}{6} n^6 - \frac{11}{8} n^4 + \frac{5}{12} n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{12} = \frac{1}{2730} n(n+1)(2n+1) \times (105n^{10} + 525n^9 + 525n^8 - 1050n^7 - 1190n^6 + 2310n^5 + 1420n^4 - 3285n^3 - 287n^2 + 2073n - 691)$$

$$= \frac{1}{13} n^{13} + \frac{1}{2} n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6} n^9 + \frac{22}{7} n^7 - \frac{33}{10} n^5 + \frac{5}{3} n^3 - \frac{691}{2730} n$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^{13} &= \frac{1}{420} n^2 (n+1)^2 \\
&\quad \times (30n^{10} + 150n^9 + 125n^8 - 400n^7 - 326n^6 \\
&\qquad + 1052n^5 + 367n^4 - 1786n^3 + 202n^2 + 1382n - 691) \\
&= \frac{1}{14} n^{14} + \frac{1}{2} n^{13} \\
&\quad + \frac{13}{12} n^{12} - \frac{143}{60} n^{10} + \frac{143}{28} n^8 - \frac{143}{20} n^6 + \frac{65}{12} n^4 - \frac{691}{420} n^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^{14} = {} & \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1) \\
& \times (3n^{12} + 18n^{11} + 24n^{10} - 45n^9 - 81n^8 + 144n^7 + 182n^6 \\
& \quad - 345n^5 - 217n^4 + 498n^3 + 44n^2 - 315n + 105) \\
= {} & \frac{1}{15} n^{15} + \frac{1}{2} n^{14} \\
& + \frac{7}{6} n^{13} - \frac{91}{30} n^{11} + \frac{143}{18} n^9 - \frac{143}{10} n^7 + \frac{91}{6} n^5 - \frac{691}{90} n^3 + \frac{7}{6} n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^{15} = {} & \frac{1}{48} n^2 (n+1)^2 \\
& \times (3n^{12} + 18n^{11} + 21n^{10} - 60n^9 - 83n^8 + 226n^7 + 203n^6 \\
& \quad - 632n^5 - 226n^4 + 1084n^3 - 122n^2 - 840n + 420) \\
= {} & \frac{1}{16} n^{16} + \frac{1}{2} n^{15} \\
& + \frac{5}{4} n^{14} - \frac{91}{24} n^{12} + \frac{143}{12} n^{10} \\
& \quad - \frac{429}{16} n^8 + \frac{455}{12} n^6 - \frac{691}{24} n^4 + \frac{35}{4} n^2
\end{aligned}
$$

なかなか複雑な式が現れますね．規則性があるようでないようで・・・．実は，

べき乗和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ を表現する公式があります．

この公式については最後にお話します．

$a_{n+1} = pa_n + q$ の形の漸化式
(技ではなく力で解いてみよう！)

漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q \tag{3.1}$$

の解き方を復習してみましょう.

$p = 1$ の場合 : $a_{n+1} = a_n + q$ (公差 q の等差数列)

$$a_n = a_1 + (n-1)q$$

$q = 0$ の場合 : $a_{n+1} = pa_n$ (公比 p の等比数列)

$$a_n = a_1 p^{n-1}$$

$p \neq 1$ かつ $q \neq 0$ の場合は？

$$a_1 = 6, \quad a_{n+1} = 3a_n - 4 \tag{3.2}$$

α についての方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ の解 $\alpha = 2$ を使って，(3.2) を

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

のように変形します．従って，$b_n = a_n - 2$ と置けば，

$$b_{n+1} = 3b_n, \quad b_1 = a_1 - 2 = 6 - 2 = 4$$

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列です．よって

$$b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$$

従って

$$a_n = b_n + 2 = 4 \cdot 3^{n-1} + 2 \tag{3.3}$$

上のようなかっこいい「技」が思いつかないときどうしよう？

1 つの答　「力」でねじ伏せる！

$$
\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} - 4 \\
&= 3(3a_{n-2} - 4) - 4 \\
&= 3^2 a_{n-2} - 3 \cdot 4 - 4 \quad \text{(展開)} \\
&= 3^2(3a_{n-3} - 4) - 3 \cdot 4 - 4 \\
&= 3^3 a_{n-3} - 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4 \quad \text{(展開)} \\
&= 3^3(3a_{n-4} - 4) - 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4 \\
&= 3^4 a_{n-4} - 3^3 \cdot 4 - 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4 \quad \text{(展開)} \\
&= \cdots
\end{aligned}
$$

この作業を初項 a_1 が現れるまで続けていくと,

$a_n = 3^{n-1} \cdot a_1 - 3^{n-2} \cdot 4 - 3^{n-3} \cdot 4 - \cdots - 3^3 \cdot 4 - 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4$

すなわち

$$a_n = 3^{n-1} \cdot a_1 - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1) \cdot 4$$

が得られ, $a_1 = 6$ でしたから,

$$a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1) \cdot 4 \quad (3.4)$$

という式に到達します. (これでも正解！！） さらに

$3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = \dfrac{1 - 3^{n-1}}{1 - 3} = -\dfrac{1}{2}(1 - 3^{n-1})$

を (3.4) に代入すると

$$a_n = 6 \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}(1 - 3^{n-1}) \cdot 4 = 4 \cdot 3^{n-1} + 2$$

となって, (3.3) と同じ式が得られます.

- かっこいい「技」が思いつかなくても，手持ちの武器を使い，ひたすら「力」で問題をたたいていけば，正解に到達できることがあります．
- 答の見た目は (3.4) のようにすっきりしないこともありますが，それでも勝ちは勝ちです．
- 問題集を勉強中に見たことのない問題が現れ，それを鮮やかに解く「技」が思いつかないときは，すぐに答を知ろうとせずに，自分の知っている知識でどこまでいけるか常に挑戦するように心がけるとよいでしょう．

3 項間の漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ (豆知識)

「数学Ｂ」の $\langle\langle$ 発展 $\rangle\rangle$ では 3 項間の漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \tag{4.1}$$

が扱われています．まずは，教科書に載っている方法で

$$a_1 = 1,\ a_2 = 8,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \tag{4.2}$$

を解いてみましょう．

$$a_1 = 1,\ a_2 = 8,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \tag{4.2}$$

2 次方程式 $x^2 = 5x - 6$ を解くと，異なる 2 つの実数解 $x = 2, 3$ が得られます．この 2 と 3 を用いると，漸化式 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6_n$ は

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \tag{4.3}$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \tag{4.4}$$

と変形されます．

(4.3) より・・・

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 6$，公比 3 の等比数列

(4.4) より・・・

数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 5$，公比 2 の等比数列

よって

$$a_{n+1} - 2a_n = 6 \cdot 3^{n-1} \tag{4.5}$$

$$a_{n+1} - 3a_n = 5 \cdot 2^{n-1} \tag{4.6}$$

最後に (4.5) から (4.6) を引いて

$$a_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-1} \tag{4.7}$$

という答が求まりました.

(豆知識)　次の定理を用いて解く！

定理 1　2 次方程式　$x^2 = px + q$　が異なる 2 つの実数解 $x = \alpha, \beta$ を持つとき，漸化式　$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$　を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$$

の形で与えられる．(A, B は定数.)

やってみよう！

$$a_1 = 1,\ a_2 = 8,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \tag{4.2}$$

2 次方程式 $x^2 = 5x - 6$ は異なる 2 つの実数解 $x = 2, 3$ を持っていました．よって定理 1 によれば，漸化式 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n \tag{4.8}$$

の形で与えられます．

あとは A と B の値が知りたいですね．これらは $a_1 = 1$ と $a_2 = 8$ から求められます．(4.8) で

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ とすると}\quad 2A + 3B &= 1 \\ n = 2 \text{ とすると}\quad 4A + 9B &= 8 \end{aligned}$$

が得られます．

この未知数 A, B についての連立 1 次方程式を解くと

$$A = -\frac{5}{2}, \qquad B = 2$$

が求まります．これらを (4.8) に代入することによって

$$a_n = -\frac{5}{2} \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n = -5 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-1}$$

という，先ほどと同じ式 (4.7) に到達しました！

2 次方程式 $x^2 = px + q$ が異なる 2 つの虚数解 $s + ti$, $s - ti$ (s, t は実数で，$t \neq 0$) を持つときは？

「答」 異なる 2 つの実数解を持つ場合と同じで次の定理 2 が成り立つ！

定理 2 2 次方程式 $x^2 = px + q$ が異なる 2 つの虚数解 $x = s + ti$, $s - ti$ を持つとき，漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = A \cdot (s + ti)^n + B \cdot (s - ti)^n$$

の形で与えられる．(A, B は定数.)

$$a_1 = -1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n \qquad (4.9)$$

を解いてみましょう．2 次方程式 $x^2 = 2x - 4$ は異なる 2 つの虚数解 $x = 1 + \sqrt{3}\,i,\ 1 - \sqrt{3}\,i$ を持ちますので，定理 2 によれば，漸化式 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = A \cdot \left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^n + B \cdot \left(1 - \sqrt{3}\,i\right)^n \qquad (4.10)$$

の形で与えられます．

あとは A と B の値が知りたいですね．これらは $a_1 = -1$ と $a_2 = 3$ から求められます．(4.10) で

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ とすると} \quad (1 + \sqrt{3}\,i)A + (1 - \sqrt{3}\,i)B &= -1 \\ n = 2 \text{ とすると} \quad (-2 + 2\sqrt{3}\,i)A + (-2 - 2\sqrt{3}\,i)B &= 3 \end{aligned}$$

が得られます．

この未知数 A, B についての連立 1 次方程式を解くと

$$A = -\frac{5}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i, \qquad B = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i$$

が求まります．これらを (4.10) に代入することによって

$$\begin{aligned} a_n &= \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i\right) \cdot \left(1 + \sqrt{3}\,i\right)^n \\ &\quad + \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i\right) \cdot \left(1 - \sqrt{3}\,i\right)^n \end{aligned} \tag{4.11}$$

という式が得られました.

$$a_1 = -1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n \qquad (4.9)$$

$\{a_n\}$ の各項を漸化式に従って求めていくと,

$$\begin{aligned}
a_1 &= -1 \\
a_2 &= 3 \\
a_3 &= 2a_2 - 4a_1 = 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 10 \\
a_4 &= 2a_3 - 4a_2 = 2 \cdot 10 - 4 \cdot 3 = 8 \\
a_5 &= 2a_4 - 4a_3 = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 10 = -24 \\
a_6 &= 2a_5 - 4a_4 = 2 \cdot (-24) - 4 \cdot 8 = -80 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

虚数は現れてこない. (4.11) の右辺に虚数が入っているのはおかしい!?

虚数は消せる！　2 次方程式 $x^2 = 2x - 4$ の虚数解 $1 + \sqrt{3}\,i$ と $1 - \sqrt{3}\,i$ を極形式で表すと

$$1 \pm \sqrt{3}\,i = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{複号同順}) \tag{4.12}$$

両辺を n 乗して

$$\left(1 \pm \sqrt{3}\,i\right)^n = 2^n \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n \quad (\text{複号同順})$$

さらにド・モアブルの公式

$$\boldsymbol{(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm \sin n\theta} \quad (\text{複号同順})$$

を使うことによって

$$\left(1 \pm \sqrt{3}\,i\right)^n = 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} \pm i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \quad (\text{複号同順}) \tag{4.13}$$

(4.13) を (4.11) に代入

$$\begin{aligned} a_n \quad &= \quad \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\, i\right) \cdot 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\, i\right) \cdot 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

右辺を展開して整理すると，虚数の部分がすべて打ち消しあって

$$a_n = 2^n \cdot \left(-\frac{5}{4}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{4\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}\right) \tag{4.14}$$

という式が得られました.

$$a_n = \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\, i\right) \cdot (1 + \sqrt{3}\, i)^n + \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\, i\right) \cdot (1 - \sqrt{3}\, i)^n \tag{4.11}$$

$$a_n = 2^n \cdot \left(-\frac{5}{4} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}\right) \tag{4.14}$$

(4.11) の右辺と (4.14) の右辺は同じものです．(4.14) の表示では虚数が現れないので嬉しいといえば嬉しいのですが，その反面，三角関数が登場するので式としては複雑な形になります．

$x^2 = px + q$ が実数の重解を持つ場合，a_n はどのように表されるのでしょうか？　ぜひ皆さんで考えてみてください．

べき乗和について (その 2)

まず最初に，次の式で定義される数 B_p を考えてみましょう．

$$B_0 = 1 \tag{5.1}$$

$$B_p = -\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}\,{}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \tag{5.2}$$

$$(p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

${}_{p+1}\mathrm{C}_k$ は 2 項係数です．

B_0, B_1, B_2, B_3 を求めてみましょう.

$B_0 = 1$.

$p = 1$ として

$$B_p = -\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}{}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \tag{5.2}$$

を考えると

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{0}(-1)^{1-k}{}_2\mathrm{C}_k \cdot B_k = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^{1-0}{}_2\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \\ &= \frac{1}{2}\cdot {}_2\mathrm{C}_0 \cdot B_0 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$p = 2$ として

$$B_p = -\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}{}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \tag{5.2}$$

を考えると

$$\begin{aligned}
B_2 &= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{2-k}{}_3\mathrm{C}_k \cdot B_k \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\left\{(-1)^{2-0}{}_3\mathrm{C}_0 \cdot B_0 + (-1)^{2-1}{}_3\mathrm{C}_1 \cdot B_1\right\} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\left\{{}_3\mathrm{C}_0 \cdot B_0 - {}_3\mathrm{C}_1 \cdot B_1\right\} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\left\{1\cdot 1 - 3\cdot\frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

$p = 3$ として

$$B_p = -\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \qquad (5.2)$$

を考えると

$$\begin{aligned}
B_3 &= -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{2} (-1)^{3-k} {}_4\mathrm{C}_k \cdot B_k \\
&= -\frac{1}{4} \cdot \left\{ (-1)^{3-0} {}_4\mathrm{C}_0 \cdot B_0 + (-1)^{3-1} {}_4\mathrm{C}_1 \cdot B_1 + (-1)^{3-2} {}_4\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \cdot \left\{ -{}_4\mathrm{C}_0 \cdot B_0 + {}_4\mathrm{C}_1 \cdot B_1 - {}_4\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \cdot \left\{ -1 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{6} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

- B_4 を計算するときには，$p = 4$ として

$$B_p = -\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}{}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \qquad (5.2)$$

を考え，B_0，B_1，B_2，B_3 を使って計算します．

- B_5 を計算するときには，$p = 5$ として (5.2) を考え，B_0，B_1，B_2，B_3，B_4 を使って計算します．
- このように，B_p は B_0，B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，... と順番に求められていく数となっています．

つまり，B_p は (5.2) という【漸化式】で決定される数ですね．ただし，これまで扱ってきた漸化式と異なる点は，B_p を計算するために，それより前にある B_0 から B_{p-1} を全部使うということです．

B_0 から B_{12} までは以下のようになります. (時間のあるときに確かめてみてください.)

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}$$
$$B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30},$$
$$B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad \ldots$$

この B_p は<u>ベルヌーイ数</u>と呼ばれています.

ベルヌーイ数を使ってべき乗和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ の公式が書ける

ことを見ていきましょう．まず，

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \text{ における } n \text{ の係数} = B_p \qquad (\bigotimes)$$

が成り立ちます．

($\bigotimes$) だけでは満足できません． $\sum_{k=1}^{n} k^p$ そのものを表現する公式が知りたいです．実は，ベルヌーイ数を使えば次のように表現することができます．

べき乗和の公式　p を 0 または自然数とする．このとき

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{p+1-k} \quad (\bigstar)$$

が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{p+1-k} \qquad (\bigstar)$$

を使って $\sum_{k=0}^{n} k^p$ $(p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ を計算してみましょう.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^0 &= \frac{1}{1} \sum_{k=0}^{0} {}_1\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{1-k} = {}_1\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^1 = 1 \cdot 1 \cdot n^1 = n \\
\sum_{k=1}^{n} k^1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} {}_2\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{2-k} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ {}_2\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^2 + {}_2\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^1 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 \cdot 1 \cdot n^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^1 \right\} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{p+1-k} \qquad (\bigstar)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} {}_3\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{3-k} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left\{{}_3\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^3 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^2 + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \cdot n^1\right\} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left\{1\cdot 1\cdot n^3 + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot n^2 + 3\cdot\frac{1}{6}\cdot n^1\right\} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{p+1-k} \qquad (\bigstar)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} {}_4\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{4-k} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \Big\{ {}_4\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^4 + {}_4\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^3 \\
&\qquad + {}_4\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \cdot n^2 + {}_4\mathrm{C}_3 \cdot B_3 \cdot n^1 \Big\} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left\{ 1 \cdot 1 \cdot n^4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^3 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^2 + 4 \cdot 0 \cdot n^1 \right\} \\
&= \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{p+1-k} \qquad (\bigstar)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} {}_5\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{5-k} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \Big\{ {}_5\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^5 + {}_5\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^4 \\
&\qquad + {}_5\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \cdot n^3 + {}_5\mathrm{C}_3 \cdot B_3 \cdot n^2 + {}_5\mathrm{C}_4 \cdot B_4 \cdot n^1 \Big\} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \Big\{ 1 \cdot 1 \cdot n^5 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^4 \\
&\qquad + 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^3 + 10 \cdot 0 \cdot n^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot n^1 \Big\} \\
&= \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{p+1-k} \qquad (\bigstar)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{5} {}_6\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{6-k} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \Big\{ {}_6\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^6 + {}_6\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^5 + {}_6\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \cdot n^4 \\
&\qquad + {}_6\mathrm{C}_3 \cdot B_3 \cdot n^3 + {}_6\mathrm{C}_4 \cdot B_4 \cdot n^2 + {}_6\mathrm{C}_5 \cdot B_5 \cdot n^1 \Big\} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \Big\{ 1 \cdot 1 \cdot n^6 + 6 \cdot \frac{1}{2} n^5 + 15 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^4 \\
&\qquad + 20 \cdot 0 \cdot n^3 + 15 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot n^2 + 6 \cdot 0 \cdot n^1 \Big\} \\
&= \frac{1}{6} n^6 + \frac{1}{2} n^5 + \frac{5}{12} n^4 - \frac{1}{12} n^2
\end{aligned}$$

べき乗和の公式やベルヌーイ数は，300 年以上も前に発見されたものです．しかし，ベルヌーイ数は現代の数学でも重要な対象として扱われています．また, べき乗和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ も現代数学の重要な研究対象の土台となっています．(興味のある人はリーマンのゼータ関数という言葉を検索してみてください.)

- ここまで，数列について，まとまりのない話を幾つかしてきました．
- 面白い，つまらない，感じ方はさまざまだと思います．
- 大学では皆さんがまだ知らない数学をたくさん学ぶことができます．
- その中から自分が面白いと思ったものを見つけ，それについて徹底的に勉強する経験を積んでいただければ幸いです．

2021年度
名城大学オープンキャンパス
模擬講義

数列についてのちょっとした話

名城大学　理工学部数学科

目次

0　まえがき

数列について，「数学B」の教科書の最初のほうに書いてあることを，ざっとおさらいしておきましょう．数を 1 列に並べたものを数列といい，数列の各数を項といいます．数列を一般的に表すには，1 つの文字に項の番号を添えて

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \ldots \tag{0.1}$$

のように書き，a_1 のことをこの数列の**初項 (第 1 項)**，a_2 のことを**第 2 項**，…，a_n のことを**第 n 項**といいます．また，この数列を $\{a_n\}$ とも書き表し，a_n のことを数列 $\{a_n\}$ の**一般項**といいます．

みなさんが知っている最も基本的な数列は

初項 a，公差 d の等差数列

$$a_n = a + (n-1)d$$

と

初項 a，公比 r の等比数列

$$a_n = ar^{n-1}$$

ではないでしょうか．これらの数列の初項から第 n 項までの和 S_n についても勉強しましたね．他にもさまざまな視点から数列について勉強してきていると思います．

この模擬講義では，皆さんが高等学校で学んできた数列についての幾つかの内容にちょっとだけ調味料を加えたお話をします．「数学B」や「数学 III」の教科書に書いてある内容だけで数列の勉強が終わってしまうのはもったいないので，せっかくだからちょっと背伸びをしてみようというわけです．

今回の話のメインテーマは次の通りです．

$$\sum_{k=1}^{n} k^p$$ の世界をちょっとのぞいてみよう！

最初と途中で少し脱線した話もしますが，気を楽にして読んでください．ちょっと雰囲気の違う数学の話を体感してもらえれば嬉しく思います．受験勉強の役には立たないかもしれません．ごめんなさい．

1　. . . (てんてんてん) に気をつけよう！

Aさん，Bさん，Cさん，Dさんの 4 人に次の問題を考えてもらいました．

次の数列 $\{a_n\}$ に対して a_{10} を推定しなさい．

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ \ldots$$

4 人の解答は次のようになりました．

$$\begin{array}{lcc} \text{Aさん} & \cdots & 20 \\ \text{Bさん} & \cdots & -\dfrac{788}{11} \\ \text{Cさん} & \cdots & 1700 \\ \text{Dさん} & \cdots & \dfrac{248}{25} \end{array}$$

みなさんはどれが正解だと思いますか？　実は，どの解答も正解になります．その理由を説明しましょう．一般項が次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考えてみてください．

$$\begin{array}{lcl} ① & \cdots & a_n = 2n \\ ② & \cdots & a_n = -\dfrac{2}{11}n^3 + \dfrac{12}{11}n^2 + \dfrac{12}{11} \\ ③ & \cdots & a_n = \dfrac{1}{3}n^4 - 2n^3 + \dfrac{11}{3}n^2 \\ ④ & \cdots & a_n = 12 - \dfrac{22}{n} + \dfrac{12}{n^2} \end{array}$$

どの数列も $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6$ となっています．従って，どの数列で a_{10} を計算しても正解になるわけですね．Aさん，Bさん，Cさん，Dさんの解答は，それぞれ ①，②，③，④ の数列で a_{10} を計算したものになっているのです．

正解がこのように複数現れる理由は，問題文の中で a_4 から先の項が . . . (てんてんてん) と書かれていて，はっきりしていないことによります．

さて，皆さんの多くはAさんと同じ $a_{10} = 20$ を頭に浮かべたのではないでしょうか．もちろん，それはまっとうな考え方ですし，上にも書いたように正解です．また，学校の試験問題や大学の入試問題の解答としては申し分ありません．しかし，柔軟な発想力を身につけるために，1 つの答が浮かんだ後に，余裕があれば他の答の可能性も考えてみるようにしてみてください．世の中には，この問題文のようなはっきりしない記述でみなさんをひっかけようとする罠がいっぱいあります．

ちなみに，この問題に対しては，<u>どんな数を答にしても正解</u>となります．(虚数でも OK です.)

2　べき乗和について (その 1)

p を 0 または自然数として，一般項 a_n が

$$a_n = n^p$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考えてみましょう．この数列の初項から第 n 項までの和

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + (n-1)^p + n^p \tag{2.1}$$

のことをべき乗和 (または累乗和) といったりします．

「数学Ｂ」の教科書には $p = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ のときのべき乗和 (2.1) について，それが n を使ってどのように書き表されるかが述べられています．復習してみましょう．

$p = 0$ の場合:

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$p = 1$ の場合:

$$\sum_{k=1}^{n} k^1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$p = 2$ の場合:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$p = 3$ の場合:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

p が 4 以上のときはどうなるでしょうか？　ちょっと見てみましょう．

$$\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$$

$$\begin{aligned}\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^8 &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3) \\ &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^9 &= \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3) \\ &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^{10} &= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5) \\ &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^{11} &= \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10) \\ &= \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^8 + \frac{11}{6}n^6 - \frac{11}{8}n^4 + \frac{5}{12}n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^{12} &= \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1) \\ &\quad \times (105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7 \\ &\qquad -1190n^6+2310n^5+1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691) \\ &= \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^9 + \frac{22}{7}n^7 - \frac{33}{10}n^5 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{691}{2730}n\end{aligned}$$

$$\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^{13} = \frac{1}{420}n^2(n+1)^2 \\ \times (30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7 \\ -326n^6+1052n^5+367n^4-1786n^3+202n^2+1382n-691) \\ = \frac{1}{14}n^{14}+\frac{1}{2}n^{13}+\frac{13}{12}n^{12}-\frac{143}{60}n^{10}+\frac{143}{28}n^8-\frac{143}{20}n^6+\frac{65}{12}n^4-\frac{691}{420}n^2$$

$$\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^{14} = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1) \\ \times (3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^9-81n^8+144n^7 \\ +182n^6-345n^5-217n^4+498n^3+44n^2-315n+105) \\ = \frac{1}{15}n^{15}+\frac{1}{2}n^{14}+\frac{7}{6}n^{13}-\frac{91}{30}n^{11}+\frac{143}{18}n^9-\frac{143}{10}n^7+\frac{91}{6}n^5-\frac{691}{90}n^3+\frac{7}{6}n$$

$$\bigstar \sum_{k=1}^{n} k^{15} = \frac{1}{48}n^2(n+1)^2 \\ \times (3n^{12}+18n^{11}+21n^{10}-60n^9-83n^8+226n^7 \\ +203n^6-632n^5-226n^4+1084n^3-122n^2-840n+420) \\ = \frac{1}{16}n^{16}+\frac{1}{2}n^{15}+\frac{5}{4}n^{14}-\frac{91}{24}n^{12}+\frac{143}{12}n^{10}-\frac{429}{16}n^8+\frac{455}{12}n^6-\frac{691}{24}n^4+\frac{35}{4}n^2$$

なかなか複雑な式が現れますね．規則性があるようでないようで・・・．実は，

べき乗和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ を表現する公式がある

のですが，その話をする前にちょっと寄り道をして，次の第 3 節とその次の第 4 節では，【漸化式】について「数学 B」の内容より少し進んだ（？）話をしてみたいと思います．第 3 節と第 4 節の話は，これまでのべき乗和の話とは直接に関係はありませんので，すぐにでも $\sum_{k=1}^{n} k^p$ の公式が知りたいという方は，第 3 節，第 4 節は飛ばして，第 5 節に進んでください．

3　$a_{n+1} = pa_n + q$ の形の漸化式 (技ではなく力で解いてみよう！)

世の中にある「数学Ｂ」のほぼ全ての教科書に，漸化式

$$a_{n+1} = pa_n + q \tag{3.1}$$

の解き方が書いてあります．少し復習してみましょう．$p = 1$ の場合は，(3.1) は $a_{n+1} = a_n + q$ となりますから，数列 $\{a_n\}$ は公差 q の等差数列となり，初項 a_1 が指定してあれば，一般項 a_n は直ちに分かります．($a_n = a_1 + (n-1)q$ ですね.) $q = 0$ の場合は，(3.1) は $a_{n+1} = pa_n$ となりますから，数列 $\{a_n\}$ は公比 p の等比数列となり，この場合も初項 a_1 が決まっていれば一般項 a_n を簡単に求めることができます．($a_n = a_1p^{n-1}$ ですね.)

では，$p \neq 1$ かつ $q \neq 0$ の場合はどのように解いたでしょうか．ここでは $a_1 = 6$, $p = 3$, $q = -4$ とした次の漸化式を解きながら復習してみましょう．

$$a_1 = 6, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 4 \tag{3.2}$$

まず，α についての方程式

$$\alpha = 3\alpha - 4$$

を解いて，解

$$\alpha = 2$$

を求めます．この $\alpha = 2$ を使うと，漸化式 (3.2) は

$$a_{n+1} - 2 = 3(a_n - 2)$$

のように変形されます．従って，$b_n = a_n - 2$ と置けば，

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3b_n \\ b_1 &= a_1 - 2 = 6 - 2 = 4 \end{aligned}$$

となり，数列 $\{b_n\}$ は初項 4，公比 3 の等比数列であることが分かります．よって

$$b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$$

であることが分かり，従って

$$a_n = b_n + 2 = 4 \cdot 3^{n-1} + 2 \tag{3.3}$$

が得られます．

どの教科書にも，だいたい上のような解き方が書いてあります．この解き方では

(i)　方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ の解 $\alpha = 2$ を使って

(ii)　等比数列 $b_n = a_n - 2$ を作り出す

という鮮やかな「技」が使われていますね．

数学の問題を解くとき，このようなかっこいい「技」がすぐに見つかればよいのですが，なかなかそうはいかないのが現実です．そういうとき，強引に「力」で解くという作戦に切り替えると上手くいくことがあります．漸化式 (3.2) の「力」を使った解き方を紹介しましょう．

$$\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} - 4 \\
&= 3(3a_{n-2} - 4) - 4 = 3^2 a_{n-2} - 3 \cdot 4 - 4 \\
&= 3^2(3a_{n-3} - 4) - 3 \cdot 4 - 4 = 3^3 a_{n-3} - 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4 \\
&= 3^3(3a_{n-4} - 4) - 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4 = 3^4 a_{n-4} - 3^3 \cdot 4 - 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4 \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

上の作業について説明します．1 行目は漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 4$ の n を $n-1$ に置き換えた式です．次に，$a_n = 3a_{n-1} - 4$ は番号を 1 つ前にずらせば $a_{n-1} = 3a_{n-2} - 4$ となりますので，その式を 1 行目の右辺に代入すると，2 行目が得られます．さらに，$a_{n-1} = 3a_{n-2} - 4$ は番号を 1 つ前にずらせば $a_{n-2} = 3a_{n-3} - 4$ となりますので，その式を 2 行目の最右辺に代入すると，3 行目が得られます．この作業をひたすら続けます．つまり，a_n からスタートして，a_{n-1}，a_{n-2}，a_{n-3}，... とひたすらさかのぼっていくわけです．この作業を初項 a_1 が現れるまで続けていくと，

$$a_n = 3^{n-1} \cdot a_1 - 3^{n-2} \cdot 4 - 3^{n-3} \cdot 4 - \cdots - 3^3 \cdot 4 - 3^2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 - 4$$

すなわち

$$a_n = 3^{n-1} \cdot a_1 - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1) \cdot 4$$

が得られ，$a_1 = 6$ でしたから，

$$a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1) \cdot 4 \tag{3.4}$$

という式に到達します．

(3.4) で正解としても良いのですが，もう少し変形してみましょう．(3.4) の右辺における $3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1$ は，「初項 1，公比 3 の等比数列の初項から第 $n-1$ 項までの和」ですから

$$3^{n-2} + 3^{n-3} + \cdots + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = \frac{1 - 3^{n-1}}{1 - 3} = -\frac{1}{2}(1 - 3^{n-1})$$

となり，これを (3.4) に代入すると

$$a_n = 6 \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}(1 - 3^{n-1}) \cdot 4 = 4 \cdot 3^{n-1} + 2$$

という (3.3) と同じ式が得られました．

このように，かっこいい「技」が思いつかなくても，手持ちの武器を使い，ひたすら「力」で問題をたたいていけば，正解に到達できることがあります．答の見た目は (3.4) のようにすっきりしないこともありますが，それでも勝ちは勝ちです．問題集を勉強中に見たことのない問題が現れ，それを鮮やかに解く「技」が思いつかないときは，すぐに答を知ろうとせずに，自分の知っている知識でどこまでいけるか常に挑戦するように心がけるとよいでしょう．

親切な教科書には，つぎのようなことが書いてあります．

漸化式が (3.1) で与えられる数列 $\{a_n\}$ の階差数列は公比 p の等比数列である．

例えば漸化式が (3.2) で与えられる数列 $\{a_n\}$ の階差数列は公比 3 の等比数列です．実は，上で紹介した「力」による解き方は，背後にこの事実が隠れています．しかし，そこに気づかなくても無理やり「力」で押していけば何とかなるということを知ってほしくて，上のようなお話をしてみました．

4　3 項間の漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ (豆知識)

「数学Ｂ」の少し難しめの教科書には ⟨⟨ 発展 ⟩⟩ として 3 項間の漸化式

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \tag{4.1}$$

の解き方が書いてあります．まずは，教科書に載っている方法で

$$a_1=1,\quad a_2=8,\quad a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n \tag{4.2}$$

を解いてみましょう．

2 次方程式 $x^2=5x-6$ を解くと，異なる 2 つの実数解 $x=2,\ 3$ が得られます．この 2 と 3 を用いると，漸化式 $a_{n+2}=5a_{n+1}-6_n$ は

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n) \tag{4.3}$$
$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n) \tag{4.4}$$

と変形されます．

(4.3) より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=6$，公比 3 の等比数列であることが分かりますので

$$a_{n+1}-2a_n=6\cdot 3^{n-1} \tag{4.5}$$

が得られます．

また，(4.4) より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=5$，公比 2 の等比数列であることが分かりますので

$$a_{n+1}-3a_n=5\cdot 2^{n-1} \tag{4.6}$$

が得られます．

最後に (4.5) から (4.6) を引いて

$$a_n=-5\cdot 2^{n-1}+6\cdot 3^{n-1} \tag{4.7}$$

という答が求まりました．

では，豆知識として，上とは異なる解き方を紹介したいと思います．それは次の定理を用いる解き方です．

定理 1　2 次方程式 $x^2 = px + q$ が異なる 2 つの実数解 $x = \alpha, \beta$ を持つとき，漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$$

の形で与えられる．(A, B は定数.)

それでは，この定理 1 を用いて (4.2) を解いてみましょう．先ほど求めたように，2 次方程式 $x^2 = 5x - 6$ は異なる 2 つの実数解 $x = 2, 3$ を持っていました．よって定理 1 によれば，漸化式 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n \tag{4.8}$$

の形で与えられます．

あとは A と B の値が知りたいですね．これらは $a_1 = 1$ と $a_2 = 8$ から求められます．(4.8) で

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ とすると} \quad 2A + 3B &= 1 \\ n = 2 \text{ とすると} \quad 4A + 9B &= 8 \end{aligned}$$

が得られます．この未知数 A, B についての連立 1 次方程式を解くと

$$A = -\frac{5}{2}, \qquad B = 2$$

が求まります．これらを (4.8) に代入することによって

$$a_n = -\frac{5}{2} \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n = -5 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 3^{n-1}$$

という (4.7) と同じ式に到達しました．

さて，今度は 2 次方程式 $x^2 = px + q$ が異なる 2 つの虚数解 $s + ti$, $s - ti$ (s, t は実数で，$t \neq 0$) を持つときも，定理 1 と同じような結果が成り立つかどうかを考えてみましょう．いきなり答を書いてしまうと，この場合も同様の結果が成り立ちます．この事実を定理 2 として書いておきましょう．

定理 2　2 次方程式 $x^2 = px + q$ が異なる 2 つの虚数解 $x = s + ti$, $s - ti$ を持つとき，漸化式　$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$　を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = A \cdot (s + ti)^n + B \cdot (s - ti)^n$$

の形で与えられる．(A, B は定数.)

それでは，この定理 2 を使って

$$a_1 = -1,\quad a_2 = 3,\quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n \tag{4.9}$$

を解いてみましょう．2 次方程式 $x^2 = 2x - 4$ は異なる 2 つの虚数解 $x = 1 + \sqrt{3}\,i$, $1 - \sqrt{3}\,i$ を持ちますので，定理 2 によれば，漸化式 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 4a_n$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = A \cdot (1 + \sqrt{3}\,i)^n + B \cdot (1 - \sqrt{3}\,i)^n \tag{4.10}$$

の形で与えられます．

あとは A と B の値が知りたいですね．これらは $a_1 = -1$ と $a_2 = 3$ から求められます．(4.10) で

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ とすると} \quad & (1 + \sqrt{3}\,i)A + (1 - \sqrt{3}\,i)B = -1 \\ n = 2 \text{ とすると} \quad & (-2 + 2\sqrt{3}\,i)A + (-2 - 2\sqrt{3}\,i)B = 3 \end{aligned}$$

が得られます．この未知数 A, B についての連立 1 次方程式を解くと

$$A = -\frac{5}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i, \qquad B = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i$$

が求まります．これらを (4.10) に代入することによって

$$a_n = \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i\right) \cdot (1 + \sqrt{3}\,i)^n + \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i\right) \cdot (1 - \sqrt{3}\,i)^n \tag{4.11}$$

という式が得られました．

ところで，(4.11) の a_n は正しい式ですが，問題の数列 $\{a_n\}$ の各項を漸化式に従って求めていくと，

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -1 \\
a_2 &= 3 \\
a_3 &= 2a_2 - 4a_1 = 2\cdot 3 - 4\cdot(-1) = 10 \\
a_4 &= 2a_3 - 4a_2 = 2\cdot 10 - 4\cdot 3 = 8 \\
a_5 &= 2a_4 - 4a_3 = 2\cdot 8 - 4\cdot 10 = -24 \\
a_6 &= 2a_5 - 4a_4 = 2\cdot(-24) - 4\cdot 8 = -80 \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

となっていて，虚数は現れてこないので，(4.11) の右辺に虚数が入っているのは気持ちが悪いですね．**実数しか現れないはずの数列であっても，一般項を書き表すためには虚数の助けを借りなければならないのでしょうか？**

そんなことはありません！ いまからそのことについて説明したいと思います．ここから先は「数学 III」の【複素数平面】の知識を使っていきます．2 次方程式 $x^2 = 2x - 4$ の虚数解 $1 + \sqrt{3}\,i$ と $1 - \sqrt{3}\,i$ を<u>極形式</u>で表すと

$$1 \pm \sqrt{3}\,i = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad (\text{複号同順}) \tag{4.12}$$

となるので，両辺を n 乗することにより

$$\left(1 \pm \sqrt{3}\,i\right)^n = 2^n \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n \qquad (\text{複号同順})$$

が得られます．さらに**ド・モアブルの公式**

$$\boldsymbol{(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm \sin n\theta} \qquad (\text{複号同順})$$

を使うことによって

$$\left(1 \pm \sqrt{3}\,i\right)^n = 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} \pm i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \qquad (\text{複号同順}) \tag{4.13}$$

であることが分かります．この (4.13) を (4.11) に代入してみましょう．

$$
\begin{aligned}
a_n = &\left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i\right) \cdot 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) \\
&+ \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{8\sqrt{3}}\,i\right) \cdot 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

となりますね．さらに右辺を展開して整理すると，虚数の部分がすべて打ち消しあって

$$a_n = 2^n \cdot \left(-\frac{5}{4} \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{4\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3} \right) \tag{4.14}$$

という式が得られました．

(4.11) の右辺と (4.14) の右辺は同じものです．(4.14) の表示では虚数が現れないので嬉しいといえば嬉しいのですが，その反面，三角関数が登場するので式としては複雑な形になります．2 次方程式 $x^2 = px + q$ が異なる 2 つの虚数解を持つ場合は，このような状況になるという事実を，どこか頭の片隅にでも入れておいていただければ嬉しいです．

$x^2 = px + q$ が実数の重解を持つ場合，a_n はどのように表されるのでしょうか？ ここではそれについてのお話はしませんが，ぜひ皆さんで考えてみてください．

5　べき乗和について (その 2)

第 2 節で予告した，べき乗和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ の公式についてお話をしたいと思います．なかなか複雑な式が登場しますので，あまり細かいことは気にせずに，“分からなくてもいいや” という気持ちで気楽に読んでもらえればと思います.

まず最初に，次の式で定義される数 B_p を考えてみましょう.

$$B_0 = 1 \tag{5.1}$$

$$B_p = -\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}{}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \quad (p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{5.2}$$

(5.2) の右辺にある ${}_{p+1}\mathrm{C}_k$ は 2 項係数です．上の式について，もう少し説明を加えましょう．まず，$B_0 = 1$ とします．次に $p = 1$ として (5.2) を考えると

$$B_1 = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{0}(-1)^{1-k}{}_2\mathrm{C}_k \cdot B_k = -\frac{1}{2}\cdot(-1)^{1-0}{}_2\mathrm{C}_0 \cdot B_0 = \frac{1}{2}\cdot{}_2\mathrm{C}_0 \cdot B_0$$

となり，ここで ${}_2\mathrm{C}_0 = 1,\ B_0 = 1$ なので

$$B_1 = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

です．次に $p = 2$ として (5.2) を考えると

$$B_2 = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{2-k}{}_3\mathrm{C}_k \cdot B_k = -\frac{1}{3}\cdot\left\{(-1)^{2-0}{}_3\mathrm{C}_0 \cdot B_0 + (-1)^{2-1}{}_3\mathrm{C}_1 \cdot B_1\right\}$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\left\{{}_3\mathrm{C}_0 \cdot B_0 - {}_3\mathrm{C}_1 \cdot B_1\right\}$$

となり，ここで ${}_3\mathrm{C}_0 = 1,\ {}_3\mathrm{C}_1 = 3,\ B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2}$ なので

$$B_2 = -\frac{1}{3}\cdot\left\{1\cdot 1 - 3\cdot\frac{1}{2}\right\} = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

です．さらに $p=3$ として (5.2) を考えると

$$\begin{aligned}
B_3 &= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2}(-1)^{3-k}{}_4\mathrm{C}_k\cdot B_k \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\left\{(-1)^{3-0}{}_4\mathrm{C}_0\cdot B_0+(-1)^{3-1}{}_4\mathrm{C}_1\cdot B_1+(-1)^{3-2}{}_4\mathrm{C}_2\cdot B_2\right\} \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\left\{-{}_4\mathrm{C}_0\cdot B_0+{}_4\mathrm{C}_1\cdot B_1-{}_4\mathrm{C}_2\cdot B_2\right\}
\end{aligned}$$

となり，ここで ${}_4\mathrm{C}_0=1$, ${}_4\mathrm{C}_1=4$, ${}_4\mathrm{C}_2=6$, $B_0=1$, $B_1=\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$ なので

$$B_3=-\frac{1}{4}\cdot\left\{-1\cdot1+4\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{6}\right\}=0$$

です．B_4 を計算するときには，$p=4$ として (5.2) を考え，B_0, B_1, B_2, B_3 を使って計算します．B_5 を計算するときには，$p=5$ として (5.2) を考え，B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 を使って計算します．このように，B_p は B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, ... と順番に求められていく数となっています．

つまり，B_p は (5.2) という【漸化式】で決定される数ですね．ただし，これまで扱ってきた漸化式と異なる点は，B_p を計算するために，それより前にある B_0 から B_{p-1} を全部使うということです．

B_4 以降も少し求めてみましょう．

$$\begin{aligned}
B_4 &= -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{3}(-1)^{4-k}{}_5\mathrm{C}_k\cdot B_k \\
&= -\frac{1}{5}\cdot\left\{{}_5\mathrm{C}_0\cdot B_0-{}_5\mathrm{C}_1\cdot B_1+{}_5\mathrm{C}_2\cdot B_2-{}_5\mathrm{C}_3\cdot B_3\right\} \\
&= -\frac{1}{5}\cdot\left\{1\cdot1-5\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{6}-10\cdot0\right\}=-\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_5 &= -\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{4}(-1)^{5-k}{}_6\mathrm{C}_k\cdot B_k \\
&= -\frac{1}{6}\cdot\left\{-{}_6\mathrm{C}_0\cdot B_0+{}_6\mathrm{C}_1\cdot B_1-{}_6\mathrm{C}_2\cdot B_2+{}_6\mathrm{C}_3\cdot B_3-{}_6\mathrm{C}_4\cdot B_4\right\} \\
&= -\frac{1}{6}\cdot\left\{-1\cdot1+6\cdot\frac{1}{2}-15\cdot\frac{1}{6}+20\cdot0-15\cdot\left(-\frac{1}{30}\right)\right\}=0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_6 &= -\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{5}(-1)^{6-k}{}_7\mathrm{C}_k\cdot B_k\\
&= -\frac{1}{7}\cdot\left\{{}_7\mathrm{C}_0\cdot B_0 - {}_7\mathrm{C}_1\cdot B_1 + {}_7\mathrm{C}_2\cdot B_2 - {}_7\mathrm{C}_3\cdot B_3 + {}_7\mathrm{C}_4\cdot B_4 - {}_7\mathrm{C}_5\cdot B_5\right\}\\
&= -\frac{1}{7}\cdot\left\{1\cdot 1 - 7\cdot\frac{1}{2} + 21\cdot\frac{1}{6} - 35\cdot 0 + 35\cdot\left(-\frac{1}{30}\right) - 21\cdot 0\right\} = \frac{1}{42}
\end{aligned}
$$

B_0 から B_{12} までは以下のようになります．(時間のあるときに確かめてみてください.)

$$
\begin{aligned}
&B_0 = 1,\quad B_1 = \frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\quad B_3 = 0,\quad B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_5 = 0,\quad B_6 = \frac{1}{42},\\
&B_7 = 0,\quad B_8 = -\frac{1}{30},\quad B_9 = 0,\quad B_{10} = \frac{5}{66},\quad B_{11} = 0,\quad B_{12} = -\frac{691}{2730},\quad \ldots
\end{aligned}
$$

この B_p はベルヌーイ数と呼ばれています．

それでは，$\sum_{k=1}^{n} k^p$ の公式と，ベルヌーイ数の関係についてお話しましょう．第 2 節で見たように，$\sum_{k=1}^{n} k^p$ は n の p 次式になっています．その p 次式における「1 次の項 n の係数」に着目してください．5 ページ, 6 ページ, 7 ページに書いてある展開式を見ると，次のことに気づけるかと思います．

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^0 \text{ における } n \text{ の係数} &= 1\ (= B_0)\\
\sum_{k=1}^{n} k^1 \text{ における } n \text{ の係数} &= \frac{1}{2}\ (= B_1)\\
\sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ における } n \text{ の係数} &= \frac{1}{6}\ (= B_2)\\
\sum_{k=1}^{n} k^3 \text{ における } n \text{ の係数} &= 0\ (= B_3)\\
\sum_{k=1}^{n} k^4 \text{ における } n \text{ の係数} &= -\frac{1}{30}\ (= B_4)\\
\sum_{k=1}^{n} k^5 \text{ における } n \text{ の係数} &= 0\ (= B_5)\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

実は

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \text{ における } n \text{ の係数} = B_p \qquad (\bigotimes)$$

であることが知られています．

さて，我々は ($\bigotimes$) だけでは満足できません．$\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ そのものを表現する公式が知りたいです．実は，ベルヌーイ数を使えば次のように表現することができます．

べき乗和の公式　p を 0 または自然数とする．このとき

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{p+1-k} \qquad (\bigstar)$$

が成り立つ．

5 ページ, 6 ページ, 7 ページで見た展開式には，こんな規則性があるのです．($\bigstar$) が正しい公式であることを実感してもらうために，($\bigstar$) を使って $\sum\limits_{k=0}^{n} k^p$ $(p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ を計算してみましょう．

$$\sum_{k=1}^{n} k^0 = \frac{1}{1} \sum_{k=0}^{0} {}_1\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{1-k} = {}_1\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^1 = 1 \cdot 1 \cdot n^1 = n$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} {}_2\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{2-k} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ {}_2\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^2 + {}_2\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^1 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 \cdot 1 \cdot n^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^1 \right\} = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{2} {}_3\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{3-k} = \frac{1}{3} \cdot \left\{ {}_3\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^3 + {}_3\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^2 + {}_3\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \cdot n^1 \right\} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left\{ 1 \cdot 1 \cdot n^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^1 \right\} = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} {}_4\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{4-k}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left\{ {}_4\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^4 + {}_4\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^3 + {}_4\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \cdot n^2 + {}_4\mathrm{C}_3 \cdot B_3 \cdot n^1 \right\}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left\{ 1 \cdot 1 \cdot n^4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^3 + 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^2 + 4 \cdot 0 \cdot n^1 \right\} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4} {}_5\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{5-k}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \left\{ {}_5\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^5 + {}_5\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^4 \right.$$
$$\left. + {}_5\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \cdot n^3 + {}_5\mathrm{C}_3 \cdot B_3 \cdot n^2 + {}_5\mathrm{C}_4 \cdot B_4 \cdot n^1 \right\}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \left\{ 1 \cdot 1 \cdot n^5 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot n^4 + 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^3 + 10 \cdot 0 \cdot n^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot n^1 \right\}$$
$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} {}_6\mathrm{C}_k \cdot B_k \cdot n^{6-k}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left\{ {}_6\mathrm{C}_0 \cdot B_0 \cdot n^6 + {}_6\mathrm{C}_1 \cdot B_1 \cdot n^5 + {}_6\mathrm{C}_2 \cdot B_2 \cdot n^4 \right.$$
$$\left. + {}_6\mathrm{C}_3 \cdot B_3 \cdot n^3 + {}_6\mathrm{C}_4 \cdot B_4 \cdot n^2 + {}_6\mathrm{C}_5 \cdot B_5 \cdot n^1 \right\}$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left\{ 1 \cdot 1 \cdot n^6 + 6 \cdot \frac{1}{2}n^5 + 15 \cdot \frac{1}{6} \cdot n^4 + 20 \cdot 0 \cdot n^3 + 15 \cdot \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot n^2 + 6 \cdot 0 \cdot n^1 \right\}$$
$$= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

いかがでしょうか？　5 ページ, 6 ページに書いてある展開式と同じものが得られましたね.

べき乗和の公式やベルヌーイ数は，300 年以上も前に発見されたものです．しかし，ベルヌーイ数は現代の数学でも重要な対象として扱われています．また，べき乗和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ も現代数学の重要な研究対象の土台となっています．(興味のある人はリーマンのゼータ関数という言葉を検索してみてください.)

ここまで，数列について，まとまりのない話を幾つかしてきました．面白い，つまらない，感じ方はさまざまだと思います．大学では皆さんがまだ知らない数学をたくさん学ぶことができます．その中から自分が面白いと思ったものを見つけ，それについて徹底的に勉強する経験を積んでいただければ幸いです.

6　おまけ

まず最初に，次の式で定義される数 $\widetilde{B}_p$ を考えてみましょう．

$$\widetilde{B}_0 = 1 \tag{6.1}$$

$$\widetilde{B}_p = -\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot \widetilde{B}_k \quad (p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{6.2}$$

この数 $\widetilde{B}_p$ もベルヌーイ数とよばれています．第 5 節で導入した B_p と比較すると $p = 1$ のときだけ

$$B_1 = \frac{1}{2},\quad B_1 = -\frac{1}{2},\quad \text{よって}\quad B_1 \neq \widetilde{B}_1$$

となっていて，

$$p \geqq 2 \quad \text{ならば} \quad B_p = \widetilde{B}_p$$

が成り立っています．($p = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のときに計算して確かめてみてください.)

このベルヌーイ数 $\widetilde{B}_p$ を使うと，次のようなべき乗和の公式が得られます．

p を 0 または自然数とする．このとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} {}_{p+1}\mathrm{C}_k \cdot \widetilde{B}_k \cdot n^{p+1-k}$$

が成り立つ．